LÖSUNGEN ZUM BLATT 1

Aufgabe 1

a)
Wir betrachten die Abbildung

$$f(x) = x^{x^a} = e^{ln(x^{x^a})} = e^{x^a ln(x)}.$$

Nun definieren wir $g(x) = x^a ln(x)$, dann folgt

$$g'(x) = a * x^{a-1} ln(x) + x^{a-1} = x^{a-1}(aln(x) + 1).$$

Weiter ist

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x)e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = x^{a-1}(aln(x) + 1)e^{x^a ln(x)}$$
$$= x^{a-1}(aln(x) + 1)x^{x^a}.$$

b)
Wir betrachten die Abbildung

$$f(x) = x^{a^x} = e^{ln(x^{a^x})} = e^{a^x ln(x)}.$$

Nun definieren wir

$$g(x) = a^x ln(x) = e^{ln(a^x)} ln(x) = e^{xln(a)} ln(x),$$

dann folgt

$$g'(x) = ln(a)e^{xln(a)} ln(x) + e^{xln(a)} \frac{1}{x} = e^{xln(a)}(ln(a)ln(x) + \frac{1}{x}) = (ln(a)ln(x) + \frac{1}{x})a^x.$$

Dann folgt wie in a)

$$f'(x) = (ln(a)ln(x) + \frac{1}{x})a^x e^{a^x ln(x)} = (ln(a)ln(x) + \frac{1}{x})a^x x^{a^x}.$$

c)

Wir betrachten die Abbildung

$$f(x) = a^{x^x}.$$

Nun definieren wir $g(x) = x^x = e^{xln(x)}$, dann folgt

$$g'(x) = (ln(x) + 1)e^{xln(x)}.$$

Weiter ist

$$f(x) = a^{g(x)} = e^{ln(a^{g(x)})} = e^{g(x)ln(a)} \Rightarrow f'(x) = ln(a)g'(x)e^{g(x)ln(a)}$$
$$\Rightarrow f'(x) = ln(a)(ln(x) + 1)e^{xln(x)} e^{x^x ln(a)} = ln(a)(ln(x) + 1)x^x a^{x^x}$$

Aufgabe 2

Erster Teil
Wir betrachten wieder $f(x) = x^{x^a}$ dann wissen wir ja schon nach Aufgabe 1

$$f'(x) = (aln(x) + 1)x^{x^a} x^{a-1}$$

Nun ist für $x \in (0, \infty)$ $x^{x^a} x^{a-1} \neq 0$ also muss für die Existenz eines Extremas

$$aln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow ln(x) = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow x_0 = e^{-\frac{1}{a}}$$

Nun gilt weiterhin

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{x^a ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0} x^a ln(x)} \overset{x=e^{-y}}{=} e^{\lim_{y\to\infty} -ye^{-ay}} = 1$$

und weiter

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{x^a ln(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} x^a ln(x)} \to \infty$$

Da die Ableitung der Abbildung f nur eine Nullstelle besitzt, und $f(x_0) < 1$ muss sie also vor der Nullstelle negativ sein und nach der Nullstelle postitiv sein, um das Verhalten, welches der Limes aufzeigt als stetige Abbildung erfüllen zu können. Also liegt in dem Punkt $x_0 = e^{-\frac{1}{a}}$ ein globales Minimum vor. Weitere Extremstellen gibt es keine.
Zweiter Teil
Betrachte: $f(x) = a^{x^x}$
Zunächst ist für $a = 1$ die Abbildung konstant und besitzt somit keine Extremstellen(oder nur Extremstellen, je nachdem wie man es sieht). Sei also $a \neq 1$. Es gilt:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\text{wie a}}{=} e^{\lim_{x\to 0} x^x ln(a)} \overset{*}{=} e^{ln(a)} = a$$

zu $*$:
$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{xln(x)}$ und $\lim_{x\to 0} xln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$
Weiterhin erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \overset{a\geq 1}{=} \infty$$

und

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \overset{a\leq 1}{=} 0$$

In Aufgabe 1 hatten wir ja schon berechnet:

$$f'(x) = ln(a)(ln(x) + 1)x^x a^{x^x}$$

Nun ist $a \neq 1$ und $x > 0$ somit ist weder $ln(a)$ noch $x^x a^{x^x}$ 0. Wollen wir also die Nullstellen der Ableitung untersuchen, so bleibt der Term $ln(x) + 1$ also $x = \frac{1}{e}$. Für den Fall $a > 1$ führt die gleiche Argumentation wie im ersten Teil zu der Erkenntnis, dass in dem Punkt $\frac{1}{e}$ ein Minimum vorliegen muss.

Im Fall $a < 1$ haben wir im Punkt 0 einen Wert gezeigt welcher genau a war. In unserer Extremstelle erhalten wir den Wert $a^{e^{-1^{e^{-1}}}} > a$, da $e^{-1} < 1$. Andererseis haben wir $\to \infty$ ein Verhalten gegen 0. Damit unsere (stetige) Abbildung dieses Verhalten erfüllt muss also in $\frac{1}{e}$ ein Maximum vorliegen.
In beiden Fällen handelt es sich offenbar um ein globales Extremum und weitere Extrema können nicht existieren.

Aufgabe 3

a)
Die Gleichheit $arcosh(x) = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ist zu zeigen. Nun ist

$$arcosh(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

und

$$(ln(x+\sqrt{x^2 - 1}))' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}(\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Also ist $h(x) = arcosh(x) - ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})$ eine konstante Funktion.
Nun ist weiterhin $arcosh(1) = 0 = ln(1 + \sqrt{1^2 - 1})$ also ist $h(x)$ die Nullabbildung und somit ist die behauptete Gleichheit gezeigt.
b)
Die Gleichheit $artanh(x) = \frac{1}{2}ln(\frac{1+x}{1-x})$ ist zu zeigen. Nun ist

$$artanh(x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

und

$$(\frac{1}{2}ln(\frac{1 + x}{1 - x}))' = \frac{1}{2}\frac{1 - x}{1 + x}\frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 + x)(1 - x)} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Zusätzlich erhalten wir: $artanh(0) = 0 = ln(\frac{1+0}{1-0}) = ln(1)$ die gleiche Argumentation wie in a) liefert das Ergebnis.
c)
Die Gleichheit $arctan(x) + arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ ist zu zeigen. Nun haben wir:

$$arctan(x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

und

$$arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{(\frac{1}{x})^2 + 1}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(\frac{1+x^2}{x^2})}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1 + x^2} = -arctan(x)'$$

Nun gilt $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ und die gleiche Argumentation wie oben liefert die Gleichheit.
d)
Die Gleichheit $arcsin(x) = arctan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$ ist zu zeigen. Zunächst

$$arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Weiterhin

$$arctan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})' = \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})^2+1}\frac{\sqrt{1-x^2}-x(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2}{1-x^2}+1}\frac{\sqrt{1-x^2}-x(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})}{1-x^2} = \frac{1}{\frac{x^2+1-x^2}{1-x^2}}\frac{\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = 1-x^2\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mit der Formulierung von oben und $arcsin(0) = 0 = arctan(\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}) = arctan(0)$ folgt die Gleichheit.

Aufgabe 4:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+\cos(x)^2)$$

Wir definieren nun die folgenden Funktionen:
$f_1(y) = \frac{1}{2}\ln(y)$
$f_2(z) = 1+z^2$
$f_3(x) = \cos(x)$
Dann ist:

$$f'(x) = f_1'(f_2(f_3(x))) * f_2'(f_2(x)) * f_3'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{f_2(f_3(x))} * 2f_3(x) * (-\sin(x)) =$$

$$\frac{1}{2+2\cos(x)^2} * 2\cos(x) * (-\sin(x)) = \frac{-\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)^2}.$$

Für die Funktion $g(x)$ machen wir genauso wie oben:

$$g(x) = \sqrt{\exp(\sin(\sqrt{x}))}$$

Wir definieren nun wieder die folgenden Funktionen:
$g_1(x) = \exp(y/2)$
$g_2(z) = \sin(z)$
$g_3(x) = \sqrt{x}$
Dann ist:

$$g'(x) = g_1'(g_2(g_3(x))) * g_2'(g_3(x)) * g_3'(x) = \frac{1}{2}\exp(\frac{g_2(g_3(x))}{2}) * \cos(g_3(x)) * \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{2}\exp(\sin(\sqrt{x})) * \cos(\sqrt{x}) * \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}} * \sqrt{\exp\sin(\sqrt{x})}.$$

Jetzt müssen wir alle lokalen und globalen Extrema dieser Funktionen bestimmen, ohne die Kenntnis auch nur der 1. Ableitung dieser Funktionen zu verwenden. Da $0 \leqslant \cos(x)^2 \leqslant 1$ ist, folgt sofort mit der Monotonie der Funktionen ln, $\sqrt{}$, dass

$$\ln(\sqrt{1+0}) \leqslant f(x) \leqslant \ln(\sqrt{2})$$

ist. Weiterhin erreicht die Funktion f den Wert $\ln(\sqrt{2})$ bei $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ und den Wert 0 bei $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Deswegen liegt bei $x = \pi k$ bzw. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ globales Maximum/Minimum vor. Für die Funktion $g(x)$ können wir dank der Monotonie der Funktionen $\sqrt{\ }$,exp und $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ das gleiche Argument wie oben verwenden. Daraus ergibt sich, dass $\sqrt{1/e} \leqslant g(x) \leqslant \sqrt{e}$ und die Funktion $g(x)$ erreicht den Wert $\sqrt{e}$ bei $x = (\frac{\pi}{2} + \pi k)^2, k \in \mathbb{Z}$ und $\sqrt{\frac{1}{e}}$ bei $x = (\pi k)^2, k \in \mathbb{Z}$. Deswegen liegt bei $x = (\pi k)^2$ bzw. $x = (\frac{\pi}{2} + \pi k)^2$ globales Minimum/Maximum vor.

Aufgabe 5:

a) zu zeigen für $\alpha > 1$, dass

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) \underbrace{<}_{I} x^\alpha - y^\alpha \underbrace{<}_{II} \alpha x^{\alpha-1}(x-y)$$

Beweis von (1):

Teilen durch y^α und setzen $z = \frac{x}{y} \in (0,1) \cup (1,\infty), x \neq y$

$$(1) \Leftrightarrow \alpha(z-1) < z^\alpha - 1 \Leftrightarrow 0 > \alpha(z-1) + 1 - z^\alpha := f(z)$$

$$f'(z) = \alpha(1 - z^{\alpha-1}) = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

Da $\alpha > 1$ ist, ist $f' > 0$ auf $(0,1)$ und < 0 auf $(1,\infty)$. Also f streng monoton wachsend auf $(0,1]$ und streng monoton fallend auf $[1,\infty)$. Da kein Randextrema auftreten, besitzt f ein isoliertes globales Maximum in $z_0 = 1$ Das ergibt sich, dass

$$f(z) < f(1) = 0 \forall z \in (0,1) \cup (1,\infty).$$

Beweis der Ungleichung (2): Teilen durch x^α, setzen $z = \frac{y}{x}$ und machen wir analog wie bei (1).

b) zu zeigen für $a, b, c > 0$ mit $a^2 \leqslant bc$ und $x > 0$ ist

$$a \leqslant bx + \frac{c}{4x}.$$

Definiere $f(x) := bx + \frac{c}{4x} - a, \ \ x \in (0,\infty)$

$\lim_{x\to\infty,0} = \infty$ und

$$f'(x) = b - \frac{4c}{16x^2} = \frac{16bx^2}{16x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{c}{4b} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{c}{4b}}$$

$f' > 0$ auf $(\sqrt{\frac{c}{4b}}, \infty)$ und < 0 auf $(0, \sqrt{\frac{c}{4b}})$ und 0, wenn $x = \sqrt{\frac{c}{4b}}$. Also f streng monoton wachsend auf $(\sqrt{\frac{c}{4b}}, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(0, \sqrt{\frac{c}{4b}})$. Da kein Randextrema auftreten, besitzt f ein globales Minimum in $x_0 = \sqrt{\frac{c}{4b}}$

Das ergibt sich, dass $\sqrt{cb} - a = f(\sqrt{\frac{c}{4b}}) \leqslant f(x) \qquad \forall x \in (0,\infty)$. Nach der Voraussetzung, dass $a^2 \leqslant bc$, folgt $0 \leqslant \sqrt{cb} - a$ Deswegen ist

$$f(x) := bx + \frac{c}{4x} - a \geq 0.$$